Funkcije više promenljivih

October 29, 2019

Prostor $\mathbb{R}^n$

Definicija

Pod realnim n-dimenzionim prostorom $\mathbb{R}^n$ podrazumeva se skup uređenih n-torki $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n),\ x_i \in \mathbb{R}$.

Elementi prostora $\mathbb{R}^n$ se nazivaju **tačkama (vektorima)**, a x_i **koordinatama**.

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$.
Baza: $e_1 = (1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, ..., 0, 1)$.
Za dva vektora $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$ sabiranje dva vektora
- $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$ množenje skalarom
- $(0, ..., 0)$ neutral za sabiranje
- $-\mathbf{x} = (-x_1, ..., -x_n)$ inverz

Skalarni proizvod je preslikavanje $V \times V \to \mathbb{R}$ koje svakom paru vektora $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ pridružuje realan broj $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$.

Za $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ važi sledeće:

- $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$
- $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$
- $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda (\mathbf{x}, \mathbf{y})$
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$

Dva vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ su **ortogonalna** ako je $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Norma je preslikavanje $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ takvo da

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}.$$

Za $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ važi sledeće:

- $||\mathbf{x}|| \geq 0.$
- $||\mathbf{x}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $||\lambda \mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}||$
- $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$

Vektor $\mathbf{x}$ je **normiran** ako $||\mathbf{x}|| = 1.$

Sistem vektora $\mathbf{x}_i$ je **ortonormiran** ako je $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 0,\ \forall i \neq j$ i
$||\mathbf{x}_i|| = 1,\ \forall i$, tj. $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$.

Rastojanje (metrika) je preslikavanje $d : V \times V \to \mathbb{R}$ takvo da

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Za $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ važi sledeće:

- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$

Kada znamo metriku, možemo definisati **skupove**.

- $K[\mathbf{a}, r] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \leq r\}$ **zatvorena kugla**
- $K(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < r\}$ **otvorena kugla**

Tačka $\mathbf{x}$ je **unutrašnja tačka skupa** M ako postoji otvorena kugla $K(\mathbf{x}, \varepsilon),\ \varepsilon > 0$ koja je u M.

Skup svih unutrašnjih tačaka skupa M je **unutrašnjost skupa** (int$M$).

Tačka $\mathbf{x}$ je **spoljašnja tačka skupa** M ako je ona unutrašnja tačka komplementnog skupa od M, tj. ukoliko postoji kugla $K(\mathbf{x}, \varepsilon)$ koja ne pripada M.

Ako tačka $\mathbf{x}$ nije ni spoljašnja ni unutrašnja tačka skupa M onda je ona **rubna tačka skupa** M.

- Skup je **otvoren** ako su mu sve tačke unutrašnje.
- Skup je **zatvoren** ako sadrži sve rubne tačke.
- Skup je **ograničen** ako je sadržan u nekoj kugli.
- Skup je **kompaktan** ako je ograničen i zatvoren.

Okolina tačke a (u oznaci $\mathcal{N}(\mathbf{a})$) je otvorena kugla sa centrom u **a**, tj.
$\mathcal{N}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < r\}$.
Svaka okolina tačke **a** sadrži bar još jednu tačku koja je različita od **a**.

Definicija

Pod realnom funkcijom n realnih promenljivih podrazumevamo svako preslikavanje $f : D_f \to \mathbb{R},\ D_f \subseteq \mathbb{R}^n$.

Domen je D_f, tj. podskup od $\mathbb{R}^n$, argument je vektor iz D_f, a rezultat je broj iz $\mathbb{R}$.
To je vektorska funkcija jer uzima vrednosti iz vektorskog prostora.

Konvergencija

Definicija

Definicija 1:
Neka je $\boldsymbol{x}_0$ tačka nagomilavanja skupa $E \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}^n$. Broj a je ***granična vrednost funkcije*** *$f : D_f \to \mathbb{R}$ u $\boldsymbol{x}_0$ ako:*
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)(\forall \boldsymbol{x} \in E \backslash \{\boldsymbol{x}_0\})\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - a| < \varepsilon.$

Definicija 2 (Hajneova definicija):
Neka je $\boldsymbol{x}_0$ tačka nagomilavanja skupa $E \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f : D_f \to \mathbb{R}$. Za funkciju f kažemo da ima ***graničnu vrednost*** *$a \in \mathbb{R}$ u tački $\boldsymbol{x}_0$ ako za svaki niz tačaka $\{\boldsymbol{x}_n\} \subset E \backslash \{\boldsymbol{x}_0\}$ koji konvergira ka $\boldsymbol{x}_0$, niz $(f(\boldsymbol{x}_n))$ konvergira ka a.*

Oznaka: $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = a$.

Teorema

Ako funkcija f ima graničnu vrednost u $\boldsymbol{x}_0$ onda je ona jedinstvena.

Dokaz sledi neposredno iz definicije jer konvergentan niz ima jedinstvenu graničnu vrednost.

Teorema

Neka su $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i neka $\exists \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = F$ i $\exists \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} g(\boldsymbol{x}) = G$. Tada postoje sledeće granične vrednosti i važi:

1. $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} (f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})) = F \pm G$
2. $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} (f(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{x})) = F \cdot G$
3. $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \frac{F}{G}$
4. $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \lambda f(\boldsymbol{x}) = \lambda F,\ \lambda \in \mathbb{R}.$

Neprekidnost

Definicija

Definicija 1: *Funkcija* $f : D_f \to \mathbb{R},\ D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ *je neprekidna u tački* $\boldsymbol{x}_0 \in D_f$ *ako*
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)(\forall \boldsymbol{x} \in D_f)\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon.$

Definicija 2: *Funkcija* $f : D_f \to \mathbb{R},\ D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ *je neprekidna u tački* $\boldsymbol{x}_0 \in D_f$ *ako za svaki niz tačaka* $(\boldsymbol{x}_n) \subset D_f$ *koji konvergira ka* $\boldsymbol{x}_0$ *niz* $(f(\boldsymbol{x}_n))$ *konvergira ka* $f(\boldsymbol{x}_0)$.